Série 5a Questions

Exercise 5a.1 – Torsion of a spinning ship

The ship at A has just started to drill for oil on the ocean floor at a depth of 1525 m (Figure 5a.1). Knowing that the top of the 0.2 m diameter steel drill pipe ($G = 77.2$ GPa) rotates through two complete revolutions before the drill bit at B starts to operate, **determine the maximum shearing stress caused in the pipe by torsion.**

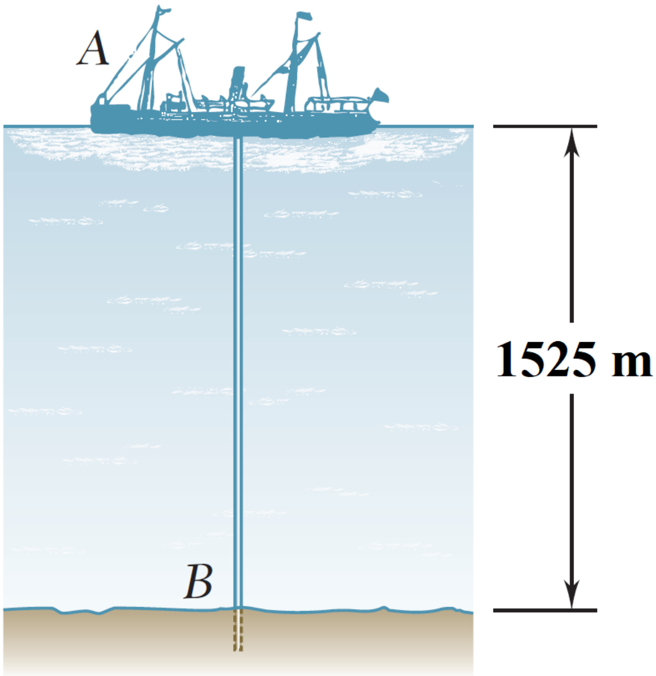

Figure 5a.1 | Drilling ship in torsion.

Texte en Français

Le navire en A vient de commencer à forer du pétrole sur le plancher océanique à une profondeur de 1525 m (Figure 5a.1). Sachant que le sommet de la tige de forage en acier de 0.2 m de diamètre ($G = 77.2$ GPa) fait deux tours complets avant que le foret en B ne commence à fonctionner, **déterminer la contrainte de cisaillement maximale provoquée par la torsion dans la tige.**

Exercise 5a.2 – Torque of a composite bar in torsion

Consider the following composite bar in Figure 5a.2 (the shear moduli are indicated in parenthesis). The cross-section is circular. The bar is clamped at one end. A torsion angle of 2° is measured at the free end of the bar.

Determine the torque, *T*, applied at the free end of the bar.

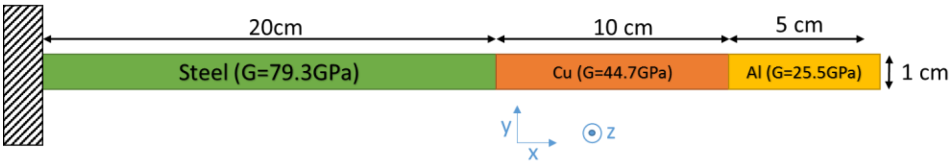

Figure 5a.2 | Composite bar.

Texte en Français

Considérer la barre composite suivante dans la Figure 5a.2 (les modules de cisaillement sont indiqués entre parenthèses). La section transversale est circulaire. La barre est fixée à son extrémité gauche. Un angle de torsion de 2 ° est mesuré à l'extrémité libre de la barre.

Déterminer le couple, *T*, appliqué à l'extrémité libre de la barre.

Exercise 5a.3 – Torsion along a bar

A bar AB of solid cross section (diameter d) is loaded by a distributed torque (see Figure 5a.3). The intensity of the torque, the torque per unit distance, is denoted *t(x)* and varies linearly from a maximum value t_A at the end A to zero at the end B. The length of the bar is L and the shear modulus of the material is G.

a) Calculate the internal torque in the bar as a function of x, $T_{int}(x)$.
b) Determine the position of maximum internal torque in the bar.
c) Determine the maximum internal torque, T_{max}, and the maximum shear stress, τ_{max}, in the bar.
d) Determine the angle of twist, ϕ, between the ends of the bar.

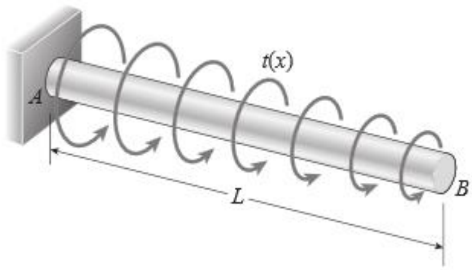

Figure 5a.3 | Bar under torsion.

Texte en Français

Une barre AB de section transversale pleine (de diamètre d) est soumise à un couple distribué (voir Figure 5a.3). L'intensité du couple, c'est-à-dire le couple par unité de distance, est nommée *t(x)* et varie linéairement d'une valeur maximale t_A à l'extrémité A à zéro à l'extrémité B. La longueur de la barre est L et le module de cisaillement du matériau est G.

a) Calculer le couple interne dans la barre en fonction de x, $T_{int}(x)$.
b) Déterminer la position du couple interne maximum dans la barre.
c) Déterminer le couple interne maximum, T_{max}, et la contrainte de cisaillement maximum, τ_{max}, dans la barre.
d) Déterminer l'angle de torsion, ϕ, entre les deux extrémités de la barre.

Exercise 5a.4 – Torsion with varied shapes

Part 5a.4.1: Cylindrical bar in torsion

Consider the following **shallow** cylinder represented in Figure 5a.4.1. It is made of copper ($G_{Cu} = 45$ GPa). We clamp it and we apply a torque ($T_0 = 5$ kN · m) at the free end. Dimensions are given on Figure 5a.4.1 ($r_1 = 10$ cm, $r_2 = 5$ cm, $L = 5$ m).

- **a) Draw the free body diagram, write the equilibrium equation, and give the expression of the internal Torque as a function of T_0.**
- **b) Express the polar moment of inertia I_p as a function of r_1 and r_2.**
- **c) Determine the minimum shear stress at the section represented in Figure 5a.4.1(a) (dashed red)?**
- **d) Determine the torsion angle at the free end, ϕ_1, as a function of r_1, r_2, L, G_{Cu}, and T_0.**

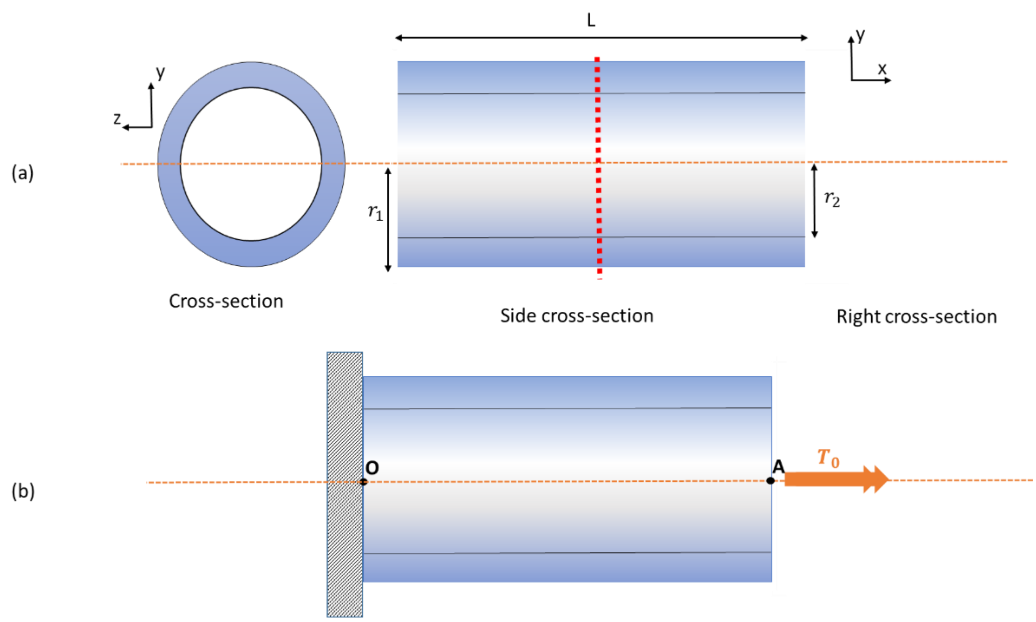

Figure 5a.4.1 |System Description

Texte en Français

On considère le cylindre **creux** de la Figure 5a.4.1 qui est fait de cuivre ($G_{Cu} = 45$ GPa). On le fixe à l'une de ses extrémités et un couple ($T_0 = 5$ kN · m) est appliqué à son extrémité libre. Les dimensions sont indiquées à la Figure 5a.4.1 ($r_1 = 10$ cm, $r_2 = 5$ cm, $L = 5$ m).

- **a) Dessiner le diagramme du corps libre, écrire les équations d'équilibre et donner l'expression du couple interne en fonction de T_0**
- **b) Exprimer le moment quadratique de torsion, I_p, en fonction de r_1, r_2, et L.**
- **c) Déterminer la contrainte de cisaillement minimale au niveau de la coupe donnée à la Figure 5a.4.1(a) (en pointillés rouges)?**
- **d) Déterminer l'angle de torsion à l'extrémité libre, dénoté ϕ_1, en fonction de r_1, r_2, L, G_{Cu}, et T_0.**

Part 5a.4.2: Conical bar in torsion

Consider the **full** conical cylinder of Figure 5a.4.2. It is made of aluminum ($G_{Al} = 26$ GPa). We clamp it and we apply a torque ($T_0 = 5$ kN · m) at the free end. Dimensions are given on Figure 5a.4.2 ($r_1 = 10$ cm, $r_3 = 5$ cm, $L/2 = 2.5$ m).

a) Express the radius of the cylinder as a function of r_1, r_3, L, and x (x is the varying parameter along the x-axis considering O' as the origin).
b) Express the polar moment of inertia, I_p, as a function of r_1, r_3, L, and x.
c) Determine the torsion angle ϕ_2, where ϕ_2 is the torsion angle at the free-end of the aluminum bar as a function of r_1, r_3, L, G_{Al}, and T_0.

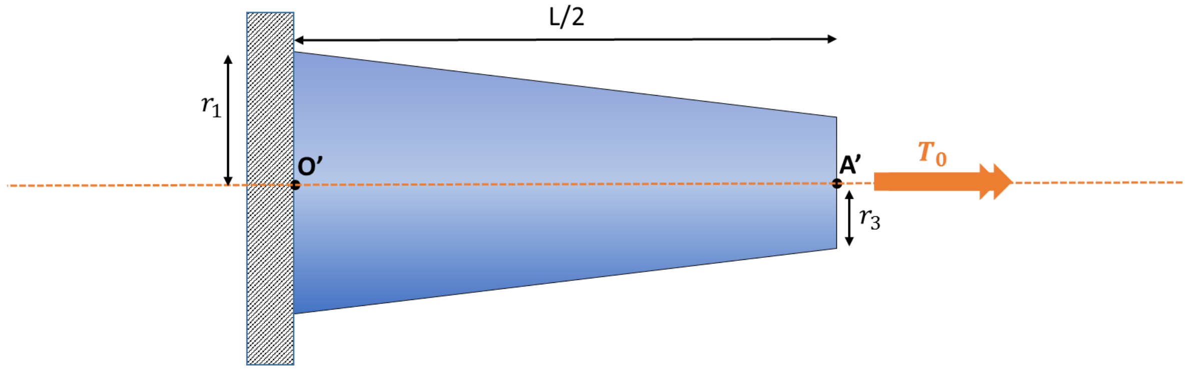

Figure 5a.4.2 | System Description

Texte en Français

On considère le cylindre **plein** de la Figure 5a.4.2 qui est fait d'aluminium ($G_{Al} = 26$ GPa). Il est fixé à une extrémité et un couple ($T_0 = 5$ kN · m) est appliqué à son extrémité libre. Les dimensions sont indiquées dans la Figure 5a.4.2 ($r_1 = 10$ cm, $r_3 = 5$ cm, $L/2 = 2.5$ m).

a) Exprimer le rayon du cylindre en fonction de r_1, r_3, L, et x (x est la variable selon l'axe des x horizontal en considérant O' comme origine).
b) Exprimer le moment quadratique de torsion, I_p, en fonction de r_1, r_3, L, et x.
c) Déterminer l'angle de torsion ϕ_2, l'angle de torsion à l'extrémité libre de la barre d'aluminium en fonction de r_1, r_3, L, G_{Al}, et T_0.

Part 5a.4.3: Complex bar in torsion

We clamp the two bars of part 5a.4.1 and part 5a.4.2 together as shown in Figure 5a.4.3. A torque, T_0, is applied at the free end of the bar.

a) Determine the torsion angle, ϕ, at the free end of the bar, as a function of ϕ_1 and ϕ_2.
b) Calculate the numerical value of ϕ.

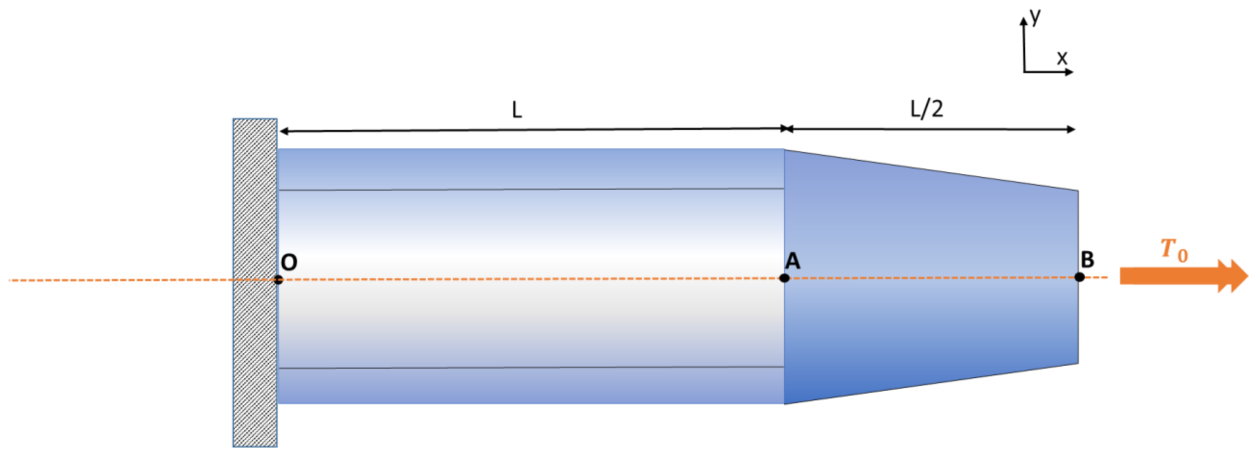

Figure 5a.4.3 | Complex bar with applied torque

Texte en Français

On assemble les deux barres de la partie 5a.4.1 et de la partie 5a.4.2 comme montré dans la Figure 5a.4.3. Un couple, T_0, est appliqué à l'extrémité libre de la barre.

a) Déterminer l'angle de torsion ϕ à l'extrémité de la barre, en fonction de ϕ_1 et de ϕ_2.
b) Calculer la valeur numérique de ϕ.

Exercise 5a.5 – Torsion in a composite cone

Consider the circular bar in Figure 5a.5 (dimensions: $D = 2$ cm; $L = 96$ cm). The Young's moduli and Poisson's ratios of the bar materials are $E_A = 35$ GPa and $\nu_A = 0.25$ in the left portion and $E_B = 72.8$ GPa and $\nu_B = 0.3$ in the right portion. We apply a torque $T_0 = 10\pi$ N · m.

a) **Calculate the numerical value of the shear modulus of both materials, G_A and G_B.**
b) **Determine the polar moment of inertia, I_P, at position x of the bar as a function of D, x, and L.**
c) **Calculate the numerical value of the maximum shear stress in the entire bar.**
d) **Calculate the numerical value of the torsion angle, ϕ, of the free end of the bar.**

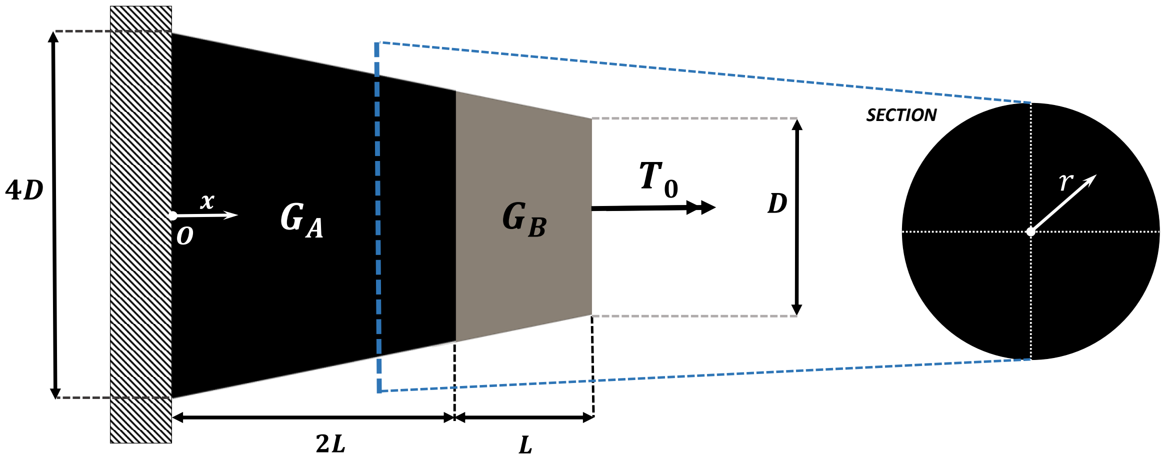

Figure 5a.5 | Schematic of the composite bar in torsion.

Texte en Français

On considère la barre circulaire de la Figure 5a.5 ci-dessus (avec $D = 2$ cm; $L = 96$ cm). Les modules de Young et les coefficients de Poisson des matériaux de la barre sont : $E_A = 35$ GPa et $\nu_A = 0.25$ pour la partie gauche et $E_B = 72.8$ GPa et $\nu_B = 0.3$ pour la partie droite. On applique un couple à son extrémité $T_0 = 10\pi$ N · m.

a) **Calculer la valeur numérique du module de cisaillement des matériaux A et B, G_A et G_B.**
b) **Exprimer le moment quadratique de torsion, I_P, à une position x de la barre en fonction de D, x, et L.**
c) **Calculer la valeur numérique de la contrainte de cisaillement maximale de la barre entière.**
d) **Calculer la valeur numérique de l'angle de torsion, ϕ, entre les deux extrémités de la barre.**

